ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'objectif de ce problème est d'étudier les itérées d'une application ; en particulier, on s'intéresse au domaine d'attraction d'un point fixe.

La partie 1 est consacrée à quelques propriétés élémentaires et à l'étude d'un exemple très simple. Dans la partie 2, on caractérise le domaine d'attraction d'un point fixe et sa frontière pour une certaine classe de fonctions. La partie 3 est l'étude des propriétés de la frontière trouvée dans la partie 2.

Définitions :

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$, et f une application de E dans E.

On note $f^{(0)}$ = Identité.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose : $f^{(k)} = f^{(k-1)} \circ f$.

Un sous-ensemble F de E est dit *stable* par f si $f(F)$ est inclus dans F.

On appelle *point fixe* de f tout point x_0 appartenant à E tel que $f(x_0) = x_0$.

On appelle *domaine d'attraction* d'un point fixe x_0 l'ensemble des x appartenant à E tels que la suite $(f^{(k)}(x))_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers x_0.

On appelle *antécédent* d'un point x tout $y \in E$ tel qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $f^{(k)}(y) = x$.

Un point fixe x_0 est dit *attractif* si son domaine d'attraction est un voisinage de x_0, et *répulsif* si son domaine d'attraction est réduit à l'ensemble de ses antécédents.

PARTIE 1

1. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ et f une application continue de E dans E. Soit x un point fixe de f.

   a. Montrer que x est attractif si et seulement si le domaine d'attraction de x est ouvert.

   b. Soient D le domaine d'attraction d'un point attractif x de f et F la frontière de D (on rappelle que F est égal à l'adhérence de D, privée de D). Montrer que D et F sont stables par f.

Suite ⟶

2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continûment dérivable.

a. Soit x_1 un point fixe de f tel que $|f'(x_1)| < 1$. Montrer que x_1 est attractif.

b. Soit x_2 un point fixe de f tel que $|f'(x_2)| > 1$. Montrer que x_2 est répulsif.

3. On considère la fonction $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 + (a+1)x + b$, $(x \in \mathbf{R})$, où a et b sont deux réels tels que $0 < a^2 - 4b < 1$.

a. Montrer que f admet un point fixe attractif, x_1, et un point fixe répulsif, x_2.

b. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, avec $x_0 \neq x_2$, et $f(x_0) = x_2$. On appelle D_i le domaine d'attraction de x_i, pour $i = 1,2$. Montrer que $D_1 =]x_0, x_2[$, et que $D_2 =]x_0, x_2]$.

PARTIE 2

Soient $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$, une application continue, strictement croissante, surjective, $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une application continue, périodique de période 2π et $a \in \mathbf{R}$, vérifiant $a > 1$.

On étudie l'application $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, définie de la manière suivante :

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, soient $r \in \mathbf{R}^{+*}$, et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (r et θ sont des coordonnées polaires de (x, y)). On pose :

$$T(x, y) = (R\cos(2\theta), R\sin(2\theta)) \quad \text{avec} \quad R = g(a(g^{-1}(r) - h(\theta))).$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$, on pose $T(0, 0) = (0, 0)$.

1. Montrer que T est bien définie et que T est continue.

2. Soit f_0 une application de $]-2, -1] \cup [1, 2[\to \mathbf{R}$.

Soit f l'application de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

- pour tout $x \in]-2, -1] \cup [1, 2[$, $f(x) = f_0(x)$;
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x) = a(f(x) - h(x))$.

(Remarquer que f est bien définie partout).

a. Montrer que si f est bornée, on a nécessairement $f = h_a$, avec (pour $x \in \mathbf{R}$),

$$h_a(x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a^{-k} h(2^k x).$$

b. Montrer que h_a est continue, périodique.

c. On suppose que h est continûment dérivable et que $a > 2$; étudier la dérivabilité de h_a.

3. On pose :

$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2$, donnés en coordonnées polaires par $r = g(h_a(\theta))\}$,

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2$, donnés en coordonnées polaires par $r < g(h_a(\theta))\} \cup \{(0, 0)\}$,

$F_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2$, donnés en coordonnées polaires par $r > g(h_a(\theta))\}$.

Montrer que :

a. F, F_1, F_2 sont stables par T.

b. F_1 et F_2 sont ouverts et que F est leur frontière.

c. F_1 est le domaine d'attraction de $(0, 0)$, et que F_2 ne contient pas de sous-ensemble borné non vide stable par T.

4. Montrer que le point $A = (g(h_a(0)), 0)$ est un point fixe répulsif pour T.

Montrer que l'ensemble des antécédents de A par T est inclus dans F et dense dans F.

5. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose (pour $x \in \mathbf{R}$), $\quad h_a^n(x) = \sum_{k=0}^{n} a^{-k} h(2^k x)$.

On considère le cas particulier :

$$g(x) = e^x, \quad \text{et} \quad h(\theta) = -(\mathrm{Log}(1 + \cos^2\theta))/4.$$

Soit $\beta > 0$; on appelle C_n l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ donnés en coordonnées polaires par

$$g(h_a^n(\theta)) - \beta \leqslant r \leqslant g(h_a^n(\theta)) + \beta.$$

Tournez la page S.V.P.

Montrer qu'il existe n_0 (dépendant de β et a) tel que, pour $n \geqslant n_0$, C_n contienne la frontière du domaine d'attraction de $(0, 0)$. Donner une valeur explicite pour n_0 dans le cas $\beta = 0{,}01$, $a = 4$. Lorsque $a = 4$, donner une expression de l'affixe de $T(x, y)$ sous la forme d'un polynôme en z et z^*, où z est l'affixe de (x, y), et z^* le conjugué de z.

PARTIE 3

Dans cette partie, h désignera une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodique de période 1 (les propriétés dégagées dans cette partie sont indépendantes de la valeur de la période).

Le nombre réel a sera supposé appartenir à $]1, 2[$.

On rappelle que l'on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$h_a(x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a^{-k} h(2^k x)$$

et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$h_a^n(x) = \sum_{k=0}^{n} a^{-k} h(2^k x).$$

Pour une application f, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et pour un intervalle I, on note :

$$V(f, I) = \sup \{ |f(x) - f(y)|, (x, y) \in I^2 \}.$$

Pour $p \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$, on note $I_{p,k} = [p\,2^{-k}, (p+1)\,2^{-k}]$.

Une fonction f est dite lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ s'il existe $K \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$, pour tout $(x, y) \in I^2$.

1. On suppose que h est convexe sur $[0, 1]$.

   a. Montrer que h_a^k est convexe sur $I_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$, et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

   b. Montrer que, si $V(h, [0, 1]) > 0$, il existe $m \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que

   $$V(h_a, I_{p,n}) > m\,a^{-n}, \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}, \text{ et tout } n \in \mathbf{N}.$$

   c. Étudier la dérivabilité de h_a.

2. On suppose que h est lipschitzienne sur $[0, 1]$.

   a. Montrer que h est lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

   b. Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}^{+*}$, telle que

   $$V(h_a, I_{p,n}) < M\,a^{-n}, \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}, \text{ et tout } n \in \mathbf{N}.$$

3. On suppose que h est convexe sur $[0, 1]$, lipschitzienne sur $[0, 1]$, et que $V(h, [0, 1]) > 0$.

   On pose $G = \{(x, h_a(x)), x \in [0, 1]\}$,

   $R_n = \{(p, p') \in \mathbf{Z}^2, \text{ tel que } (I_{p,n} \times I_{p',n}) \cap G \neq \varnothing\}$,

   $N_n = \operatorname{card} R_n$.

   Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbf{R}^{+*}$, tels que

   $$N_n \in [u\,(4/a)^n, v\,(4/a)^n], \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

   Remarque. – Cette propriété permet d'établir que (au sens d'une certaine définition) la dimension fractionnaire de G est $2 - (\operatorname{Log} a / \operatorname{Log} 2)$. Ce raisonnement s'adapte aisément pour l'étude de la dimension de la frontière du domaine d'attraction de $(0, 0)$ pour les fonctions définies dans la partie 2.

page 94
E.N.S. de LYON
Option Math

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail